

Abschätzung des Temperaturgradienten in thermisch stationär betriebenen Festkörperlasern

G. ZEIDLER

Zentral-Laboratorium für Nachrichtentechnik der Siemens AG, München

(Z. Naturforsch. 22 a, 909–913 [1967]; eingegangen am 23. März 1967)

Der Temperaturgradient in kontinuierlich und quasikontinuierlich betriebenen Festkörperlasern wird abgeschätzt. Die Strahlengänge im thermisch geschichteten Medium und die thermische Krümmung der Endflächen werden berechnet und durch äquivalente Brennweiten berücksichtigt. So ergeben sich Korrekturmöglichkeiten für verschiedene Resonatortypen.

Es zeigt sich, daß ein mit einfachen Mitteln korrigierbarer optischer Resonator dann möglich ist, wenn das Pumplicht den Kristall homogen ausleuchtet.

Die stark vereinfachten Überlegungen ergeben eine gute Übereinstimmung mit früheren Messungen an kontinuierlichen Rubinlasern.

Der Energieumsatz in Festkörperlasern bewirkt eine thermische Variation der Betriebsparameter. Die Pumpart bestimmt dabei wesentlich auch die Funktionsweise. Im Einzelimpulsbetrieb ist der dynamische Prozeß, der das Emissionsspektrum und die Resonatorausbildung als Funktion der Zeit bestimmt, wegen der Einmaligkeit der Ereignisse nur schwer analysierbar. Erst in jüngster Zeit konnten an kontinuierlich und quasikontinuierlich betriebenen Rubinlasern einfach analysierbare Beobachtungen gemacht werden, da die stationären thermischen Verhältnisse die Messungen erleichtern. So wurde von Röss in ¹ eine erhebliche Temperaturerhöhung des Rubins im gepumpten Zustand gegenüber dem ungepumpten Zustand angegeben. Ein im kalten Zustand planparalleler Resonator wirkte im kontinuierlichen Betrieb als thermische Linse und konnte in seinem Verhalten als allgemein konfokaler Resonator beschrieben werden.

Mittlerweile liegen weitere Meßergebnisse vor, die dieses Verhalten bestätigen ^{2, 3}.

Da die Ausbildung des Resonators für die praktische Anwendung der entstehenden Strahlung wichtig ist, sollen die bisherigen Meßergebnisse mit einfachen theoretischen Überlegungen geklärt werden.

1. Der Temperaturverlauf im Rubin

Bei den oben zitierten Messungen wurden rotationssymmetrische Ellipsoide als Pumpsiegel benutzt. Diese Pumpgeometrie erzeugt, im Gegensatz zum

elliptischen Zylinder, ein breites Plateau der Energiedichte im Querschnitt des Laserstabes.

Zur Vereinfachung der Rechnung kann deshalb angenommen werden, daß der Kristall homogen ausgeleuchtet wird. Diese Näherung ist für dünne, immerierte Rubinstäbe bei Verwendung von Lichtquellen mit wenigstens gleich großem Bogenquerschnitt möglich.

Bei homogener Ausleuchtung bewirkt die räumlich konstante Pumpenergiedichte, daß im stationären Betrieb pro Volumen und Zeiteinheit dieselbe Wärmemenge durch den Übergang von den Pumpbändern zu den R_1 , R_2 -Linien entsteht.

Dies bedeutet, daß die Divergenz D der Wärmestromdichte S im gepumpten Kristall konstant ist.

Für zylindersymmetrische Kristalle gilt dann

$$S(r) = r D/2 \quad (1)$$

und durch Integration der Wärmeleitungsgleichung

$$\vartheta(r) = \vartheta_0 - \frac{D r^2}{4 \lambda} \quad (2)$$

Dabei bedeutet ϑ_0 die Temperatur der Stabmitte und λ die Wärmeleitfähigkeit, die beispielsweise für Rubin 0,4 W/cmgrd beträgt ⁴.

Die Lösung (2) wurde bereits von KOHLRAUSCH für das äquivalente Problem der Temperaturverteilung in einen stromdurchflossenen Leiter angegeben ⁵.

Die quadratische Temperaturverteilung nach (2) gilt, streng genommen, als Lösung des stationären Problems, nur für kontinuierlich gepumpte Laser. In erster Näherung gilt diese Temperaturverteilung

¹ D. Röss, J. Appl. Phys. 37, 3587 [1966].

² D. Röss, Z. Naturforsch. 21 a, 1731 [1966].

³ G. ZEIDLER, Z. Naturforsch. 22 a, 566 [1967].

⁴ D. Röss, Laser, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt/Main 1966, S. 521.

⁵ F. KOHLRAUSCH, Ann. Phys. 1, 133 [1900].



auch für quasikontinuierlich betriebene Laser, das sind schnell gepulste Laser, bei denen der zeitliche Abstand zwischen den einzelnen Pumpimpulsen wesentlich kleiner ist als die Abkühlzeitkonstante des Laserstabs mit seiner speziellen Kühlanordnung.

Für Rubinlaser sind beide Betriebsarten möglich. Der kontinuierliche Betrieb wurde beispielsweise in ⁶ beschrieben und bei den Messungen in ¹ angewandt. Die Messungen in ^{2,3} wurden im quasikontinuierlichen Betrieb, das heißt, mit dem in ⁷ beschriebenen Pulsbetrieb mit einer Folgefrequenz von 50 Hz bis 100 Hz durchgeführt.

Maßgebend für die Größe des Temperaturgradienten ist die Wärmestromquellstärke D , die von der Pumpart abhängt. Aus ⁸ entnimmt man z. B. für den kontinuierlich an der Schwelle betriebenen Rubinlaser eine absorbierte Pumpleistung von 1400 W/cm^3 . Dabei wurde der Quantenwirkungsgrad η zur Vereinfachung gleich eins gesetzt. Für eine Betriebstemperatur in der Gegend von 300°K entnimmt man aus der Literatur ⁴ einen Quantenwirkungsgrad von $\eta = 0,5$. Rechnet man mit einer mittleren Pumplichtfrequenz von $6,25 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, so liefert der Übergang zu den R_1, R_2 -Linien bei $4,8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ eine Wärmeleistung von 650 W/cm^3 . Mit diesem Wert für D erhalten wir aus (2) eine Temperaturdifferenz von 4°C zwischen der Stabmitte und dem wassergekühlten Außenmantel eines kontinuierlich an der Schwelle gepumpten, 2 mm dicken Rubinstabs.

Beim quasikontinuierlichen Betrieb nach ⁷ benötigt die Blitzlampe eine mittlere Mindestleistung, um im Quecksilberhochdruckbogenbetrieb zu laufen. Deshalb kann der Laser bei dieser Pumpart nur wesentlich über der Schwelle betrieben werden. Nach einer indirekten Messung lag die Schwellenenergie bei 2,5 Ws, was bei Berücksichtigung des 3 ms langen Pumpimpulses mit einer Impulsenergie von etwa 3,8 Ws erreicht werden kann. Die Energie eines Pumpimpulses kann jedoch bei dieser speziellen Blitzlampe zwischen 9 Ws und 13 Ws variiert werden, so daß der Laser mit etwa der 3-fachen Schwellenenergie gepumpt wird. Nach ⁸ beträgt die Schwelle eines gepulsten Rubinlasers etwa $4,2 \text{ Ws/cm}^3$ (Quantenwirkungsgrad $\eta = 1$). Dies bedeutet, mit $\eta = 0,5$ bei der dreifachen Schwellenenergie, einer Impulsfolgefrequenz von 70 Hz und bei Berücksichtigung des 3 ms langen, etwa cos-förmigen Pumpimpulses,

eine Wärmeleistung von rund 650 W/cm^3 , was dem Betrieb des kontinuierlichen Lasers an der Schwelle entspricht.

Der oben ermittelte rechnerische Wert für den Temperaturunterschied liegt erheblich unter den aus dem Emissionsspektrum ermittelten Meßwerten in ^{1,3}. Dies ist darauf zurückzuführen, daß obige Rechnung nur den Temperaturgradienten im Rubin berücksichtigt, während bei diesen Messungen die Temperaturdifferenz des gepumpten Rubins gegenüber dem ungepumpten Zustand angegeben wurde. Es muß also der Temperaturgradient im Kühlwasser mitberücksichtigt werden, der stark von der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers abhängt.

2. Strahlwege im thermisch geschichteten Lasermaterial

Für die Funktion des Rubinlasers ist vor allem der Verlauf der Strahlen im thermisch geschichteten Material interessant.

Für die in (4) berechnete quadratische Temperaturverteilung folgt eine quadratische Verteilung des Brechungsindex

$$n = n_0 \left(1 - \frac{D}{4\lambda} r^2 \cdot \frac{1}{n_0} \cdot \frac{\partial n}{\partial \vartheta} \right). \quad (3)$$

Für ein zylindrisches Medium mit quadratischer Verteilung des Brechungsindex wurden in ⁹ die Strahlwege berechnet. Nach dieser Arbeit ergibt eine quadratische Abhängigkeit des Brechungsindex der Form

$$n = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} a_2 r^2 \right) \quad (4)$$

für $a_2 \ll 1$ sinusförmige, periodische Strahlwege der Form

$$r = r_i \cdot \cos \sqrt{a_2} z + r_i' \cdot \sqrt{\frac{1}{a_2}} \sin \sqrt{a_2} z, \quad (5)$$

wobei r_i ein Anfangspunkt und

$$r_i' = dr/dz$$

die dazugehörige Steigung eines Strahlpunktes ist.

Ein Vergleich von (5) und (6) liefert

$$a_2 = \frac{D}{2\lambda} \cdot \frac{1}{n_0} \cdot \frac{\partial n}{\partial \vartheta}. \quad (6)$$

Aus (7) und (8) kann man die halbe „Periode“ der Strahlen berechnen:

$$z_p = \frac{\pi}{\sqrt{a_2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{D}{2\lambda} \cdot \frac{1}{n_0} \cdot \frac{\partial n}{\partial \vartheta}}}. \quad (7)$$

⁶ D. Röss, *Microwaves* **1965** (April), S. 5.

⁷ D. Röss u. G. ZEIDLER, *Electronics* **39**, (18) 115 [1966].

⁸ D. Röss, *Laser*, S. 109.

⁹ S. E. MILLER, *Bell Syst. Techn. J.* **44**, 2017 [1965].

Aus ⁴ entnimmt man z. B. für Rubin die Zahlenwerte $n = 1,769$ und $\partial n / \partial \vartheta = 13 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$ für den ordentlichen Strahl. Damit erhält man für den an der Schwelle kontinuierlich gepumpten Laser $z_p = 40 \text{ cm}$. z_p ist die Länge, mit der sich die Strahlen in einem sehr langen, gepumpten Rubinstab periodisch fokussieren würden. Für Stäbe, die im Verhältnis zu diesen Längen kurz sind, wirkt der gepumpte Rubin als thermische Linse ¹.

Die durch (5) gegebenen Strahlen entsprechen ganz den Strahlenverläufen einer äquidistanten Folge von aberrationsfreien Linsen ^{10, 11}.

Damit ist sofort klar, daß ein optischer Resonator, der homogen ausgeleuchtet wird, durch aberrationsfreie Linsen in passender Weise korrigiert werden kann. Umgekehrt folgt daraus: Jeder nicht homogen ausgeleuchtete Laserkristall kann mit idealen Linsen nicht vollständig korrigiert werden. Eine definierte Korrektur ist dann nur mit kompliziert herstellbaren Linsen höherer Ordnung (SCHMIDT-Platten) möglich. Wird der Kristall nicht einmal rotationssymmetrisch ausgeleuchtet, was z. B. in zylindrischen Pumpsystemen der Fall ist, so wird eine Korrektur sehr schwierig.

Mit den durch Gl. (7) gegebenen Strahlwegen sind verschiedene optische Resonatoren denkbar.

Bei einem dem konzentrischen Resonator entsprechenden Typ können die Strahlen durch sin-Funktionen unterschiedlicher Amplitude beschrieben werden. Im Zentrum (Koordinatenursprung) ergibt sich die bekannte Fokussierung (Abb. 1). Der Krümmungsradius der Kristalloberfläche ist nicht mehr gleich der halben Stablänge, sondern größer. Der Krümmungsradius muß so gewählt werden, daß die Endfläche orthogonal zu den Strahlwegen verläuft.

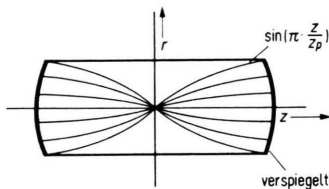


Abb. 1. Der konzentrische Resonator, gebildet aus einem homogen ausgeleuchteten, quadratisch geschichteten Laserstab.

Beim konfokalen Resonator ¹² ist dann der Krümmungsradius der Endflächen noch größer. Die Strahlen bestehen aus einer Sequenz von zueinander

etwas phasenverschobenen sin-Funktionen, die nach endlich vielen Reflexionen innerhalb eines begrenzten Modenvolumens bleiben. Der mathematische Beweis für die Existenz einer Kaustik solcher Strahlen steht noch aus.

Interessanter sind Strahlwege, aus denen sich Moden wie in den bekannten plan-parallelen Resonatoren bilden lassen. Diese Moden sind dadurch gekennzeichnet, daß die Strahlenwege durch gerade Funktionen gegeben sind.

Zu diesem Zweck betrachten wir Lösungen, die durch cos-Funktionen gegeben sind (Abb. 2).

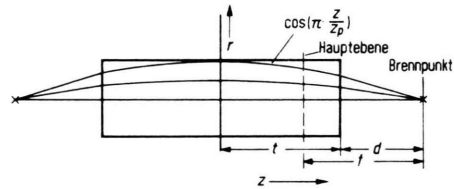


Abb. 2. Brennweite eines thermisch geschichteten Laserstabs beim Betrieb mit Außenspiegeln.

Aus ⁹ entnimmt man für den Abstand des äußeren Fokus von der Stirnfläche

$$d = \left| \frac{\text{ctg} \frac{\pi t}{z_p}}{n \frac{\pi}{z_p}} \right| \quad (8)$$

und für die Brennweite

$$f_1 = \frac{1}{n \frac{\pi}{z_p} \sin \left(\frac{\pi t}{z_p} \right)} \approx \frac{z_p^2}{n t \pi^2} \quad (9)$$

Für gebräuchliche Laserstäbe ist die Länge t wesentlich kleiner als die Periodenlänge z_p , so daß die Hauptebene in erster Näherung mit der Kristalloberfläche zusammenfällt.

Der thermisch geschichtete Laserkristall nach Abb. 2 kann also durch 2 Sammellinsen der Brennweite f_1 im Abstand $2t$ ersetzt werden.

Berechnet man Zahlenwerte für einen 2 mm dicken, 25 mm langen, an der Schwelle kontinuierlich betriebenen Rubinlaser, so folgt eine Brennweite von 76 cm. Dabei ist zu beachten, daß die aus ⁹ entnommene Brennweite (9) die Brechung zwischen Kristalloberfläche und Luft berücksichtigt, so daß obige Zahlenwerte nur für Resonatoren mit Außenspiegel brauchbar sind.

¹⁰ J. R. PIERCE, Theory and Design of Electron Beams, Van Nostrand, Amsterdam 1954.

¹¹ S. E. MILLER, Bell Syst. Techn. J. **43**, 1741 [1964].

¹² D. RÜSS u. G. ZEIDLER, Z. Naturforsch. **21a**, 340 [1966].

3. Thermische Krümmung der Endflächen

Die inhomogene Temperaturverteilung bewirkt auf Grund der mechanischen Ausdehnung des Materials eine zusätzliche Krümmung der Endflächen.

Ist α der auf die Länge bezogene Ausdehnungskoeffizient des Lasermaterials, so gilt mit der durch (2) gegebenen quadratischen Temperaturverteilung

$$z = t - \frac{D \alpha t}{4} r^2, \quad (10)$$

was eine parabelförmige Verkrümmung der im kalten Zustand ebenen Kristallstirnfläche bedeutet.

Mit dem Krümmungsradius der Parabel im Scheitel

$$R_2 = \frac{2 \lambda}{D \alpha t}$$

und der üblichen Linsenformel erhalten wir die dazugehörige Brennweite:

$$f_2 = \frac{2 \lambda}{(n-1) D \alpha t}. \quad (11)$$

Die Oberflächenkrümmung kann damit für den Betrieb mit Außenspiegel modellmäßig ersetzt werden durch eine Sammellinse, deren Hauptebene für übliche Dimensionen wieder in unmittelbarer Nähe der Kristallstirnfläche liegt.

Für die Längenausdehnung des Rubins entnimmt man z. B. aus ¹³ den Zahlenwert:

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{dz}{d\theta} = \alpha = 5,85 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}.$$

Für unser Zahlenbeispiel erhalten wir somit eine Brennweite von 220 cm.

4. Äquivalentes Linsensystem eines Resonators mit Außenspiegeln. Möglichkeit der Korrektur

Die mechanische Krümmung der Endflächen und die gekrümmten Strahlwege können also bei cos-förmigen Strahlen durch dünne Linsen an den Endflächen des Kristalls ersetzt werden. Die Brennweiten bestimmen dann nach der bekannten Formel

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (12)$$

die resultierende Brennweite f .

Der gesamte thermische Gradient eines solchen Resonators kann durch 2 dünne Linsen dieser Brennweite, die an den Stirnflächen des gepumpten Materials liegen, ausgedrückt werden. Für unser Zahlen-

beispiel (12) beträgt die äquivalente Brennweite einer Stirnfläche z. B. 56 cm.

Dies gilt jedoch nur für den Betrieb mit Außenspiegel. Bringt man nun in den Resonator in der Nähe beider Stirnflächen Zerstreuungslinsen mit obiger Brennweite ein, so ist dadurch die Wirkung des thermischen Gradienten im gepumpten Lasermaterial kompensiert. Mit ebenen Außenspiegeln ergibt sich dann ein planparalleler Resonator.

In ähnlicher Weise kann man auch eine Korrektur direkt verspiegelter Stäbe angeben. Die Wirkung der thermischen Schichtung kann man dann nicht mehr gut durch Brennweiten äquivalenter Linsen beschreiben. Will man durch eine Korrektur der Endflächen erreichen, daß bevorzugt der Grundmode schwingungsfähig ist, so müssen die dem Grundmode entsprechenden Strahlen auf der Endfläche senkrecht stehen, d. h., die Endflächen müssen Orthogonaltrajektorien zu den aus (5) folgenden cos-förmigen Strahlen sein, was zu einem konkaven Anschliff der Stabendflächen führt.

Ob für die Praxis dieser Korrekturmöglichkeiten die hier angeführte rohe Theorie ausreicht, muß durch ausführliche Experimente noch nachgeprüft werden.

5. Nachprüfung der Theorie an einem Experiment ²

Die Wirkung des thermischen Gradienten in Festkörperlasern wurde von Röss ² mit einem experimentellen Aufbau nach Abb. 3 demonstriert. Ein 25 mm-Rubin wurde mit ebenem Außenspiegel quasikontinuierlich betrieben. Abhängig von der Pumpleistung funktioniert der Laser nur, wenn der Außenspiegel innerhalb eines genau definierten Abstandes vom Kristall blieb. Die kritische Spiegelstellung, mit der der Resonator gerade noch funktionsfähig war, ist dadurch gekennzeichnet, daß der Fokus der thermischen Sammellinse des Kristalls genau auf der Spiegeloberfläche liegt. Die von Röss gemessene Abhängigkeit dieser kritischen Spiegelstellung von der elektrischen Pumpenleistung soll hier mit obiger Theorie verglichen werden.

Wie in Abb. 3 gezeichnet, soll genähert angenommen werden, daß die hintere Kristallfläche eben bleibt, während die ganze Linsenwirkung durch eine Linse an der vorderen Stirnfläche ausgedrückt wird. Diese Näherung ist möglich, solange der Abstand des Außenspiegels groß gegen die Kristalllänge ist.

¹³ D. Röss ⁴, Laser, S. 352.

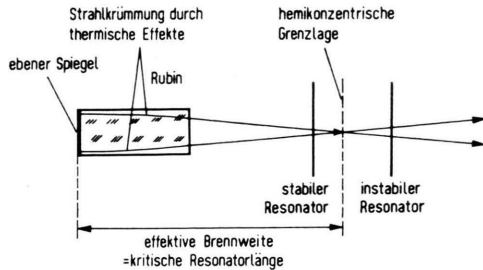


Abb. 3. Meßanordnung für die effektive Brennweite nach Röss.

In die Formeln (9) und (11) ist dann $t = 2,5$ cm einzusetzen. Für die Abhängigkeit der Brennweiten von der zur Pumpenergie proportionalen Größe D gilt dann mit (12):

$$\frac{1}{f} = 5,36 \cdot 10^{-3} D \sin(7,57 \cdot 10^{-3} D) + 1,4 \cdot 10^{-5} D \quad (13)$$

und in erster Näherung

$$f = \frac{1,8 \cdot 10^4}{D} \text{ cm.} \quad (14)$$

Im stationären Betrieb ist D eine lineare Funktion der Pumpleistung P . Nimmt man die Meßergebnisse von Röss² und vergleicht diese mit obiger Formel, so sieht man, daß sich eine gute Übereinstimmung ergibt, wenn man für die elektrisch zugeführte Pumpleistung P ansetzt

$$P = 0,62 D \text{ W,} \quad (15)$$

wobei D in W/cm^3 einzusetzen ist.

Formel (13) wurde damit ausgewertet und in Abb. 4 dargestellt.

D muß dabei zwischen 1100 W/cm^3 und 1500 W/cm^3 variiert werden, um die in dem durch die Lampe vorgegebenen Betriebsbereich von 800 W bis 1000 W gemessene effektive Brennweite zu erklären. In Abschnitt 1 wurde D zu rund 650 W/cm^3 abgeschätzt. Die Abweichung kann damit zusammenhängen, daß dort andere Werte für den Quantenwirkungsgrad oder die Zahl der an der Schwelle anzu-

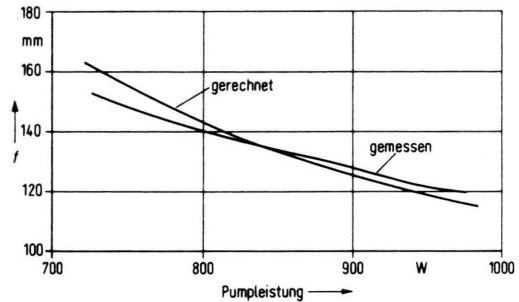


Abb. 4. Vergleich der Rechnung mit der Messung nach Röss.

regenden Cr-Ionen zu nehmen sind oder daß bei der Berechnung der effektiven Brennweite noch andere Effekte, wie z. B. die mechanische Verspannung des Kristallgitters durch die unterschiedliche thermische Ausdehnung, zu berücksichtigen sind.

Im Rahmen der damit gegebenen Näherung soll mit dem aus den Messungen der effektiven Brennweite bestimmten Werten von D der Wirkungsgrad der Pumpenanordnung berechnet werden.

Bei dem maximal möglichen Pumpepegel wurde der 2 mm dicke Stab vollständig invertiert, d. h., mit etwa 970 W elektrischer Leistung wurde in einem Volumen von $0,08 \text{ cm}^3$ ein Wärmeumsatz von 1500 W/cm^3 erreicht. Rechnet man wieder mit der mittleren Pumplichtfrequenz, so ergibt sich aus der elektrisch zugeführten Pumpleistung ein Wärmeumsatz von 2800 W/cm^3 . Dies bedeutet, daß die elektrische Leistung mit einem Wirkungsgrad von 53% als Pumplicht in den Rubin gebracht wird.

Dieser Wert ist unerwartet hoch, so daß es lohnend erscheint, die Leistungsbilanz des Pulslasers in Zukunft genauer zu studieren. Die hier angegebene Abschätzung ging von idealisierten Voraussetzungen aus, so daß eine genaue Berechnung zusammen mit ausführlichen Messungen nützlich erscheint.

Herrn Dr. D. Röss, der diese Überlegungen anregte, möchte ich herzlich für Diskussion und Förderung der Arbeit danken.